

En inversant la première position (A)T dans chacun des huit cas (ce qui laisse d'ailleurs leur forme inchangée dans la mesure où elle est toujours réciproque) et en l'additionnant à la seconde position (A)N, il en résulte chaque fois la position du niveau à bulle par rapport au télescope ; soit :

- | | |
|----------------------------|-------------------------------------|
| 1) pos (T)N = 1 2 3 | 5) pos (T)N = 1 $\bar{2}$ $\bar{3}$ |
| 2) = $\bar{1}$ $\bar{2}$ 3 | 6) = $\bar{1}$ 2 $\bar{3}$ |
| 3) = $\bar{1}$ 2 $\bar{3}$ | 7) = 1 $\bar{2}$ $\bar{3}$ |
| 4) = 1 $\bar{2}$ 3 | 8) = 1 2 3 |

Le niveau à bulle reçoit alors quatre positions différentes par rapport au télescope, une dans les premier et huitième cas, une seconde dans les deuxième et septième, une troisième dans les troisième et sixième, une quatrième dans les quatrième et cinquième cas. La première est la position naturelle ; les trois autres, des inversions autour des troisième, deuxième et premier axes positionnels.

Dans d'autres cas, il conviendrait d'y ajouter, en tant que nouvel élément, l'espace infini avec des axes positionnels convenablement choisis, comme par exemple pour l'héliotrope, l'inclaison magnétique, etc. Nous laissons le lecteur loisible de tout approfondissement.

De l'hélicoïde

L'hélicoïde est une ligne à deux axes de courbure, qui peut être considérée comme le trajet d'un point se déplaçant dans l'espace simultanément de façon cyclique et progressive.

Afin de donner à ce concept une généralité qui convienne aux considérations topologiques, nous nous servirons des constatations suivantes : nous entendons par le terme de ligne cyclique ou *boucle* (dans notre perspective actuelle), la circonférence de toute figure plane quelconque, à condition que son périmètre ne se croise nulle part lui-même et ne possède pas non plus de points multiples. Un point quelconque à l'intérieur de la surface ainsi encadrée sert de centre à la boucle et l'on peut,

afin de mieux s'en faire une idée, choisir pour cela le centre de gravité de la surface : nous désignerons ce point par 0. Les extrémités d'un diamètre (passant par 0) seront désignées par 1 et $\bar{1}$, les extrémités d'un second diamètre (quelconque ou si l'on préfère, perpendiculaire au premier) par 2 et $\bar{2}$. Les deux faces du plan circulaire peuvent être distinguées comme l'endroit et l'envers. Nous tirerons alors sur le plan circulaire au point 0 une perpendiculaire et désignerons un point situé à l'endroit de celle-ci par 3 et un autre à son envers par $\bar{3}$. Cette boucle se trouve donc désignée de façon analogue à la distinction positionnelle des dimensions étudiée plus haut, et les points 0, 1, 2, 3 peuvent, comme dans le cas précédent, se trouver en position d'axe droit ou gauche. On peut donner à la boucle un mouvement translatore en faisant progresser son centre 0 selon un chemin quelconque, droit ou courbe, que nous nommerons sa *conductrice* ou plus simplement son *trajet*. Nous ne nous autoriserons seulement pour l'instant que des changements de direction continue sur le parcours de la conductrice et excluerons ainsi angles et pointes, cette limitation ne valant cependant pas pour la boucle. Prenons deux points C et D sur la conductrice, entre lesquels nous allons considérer le mouvement de la boucle ; nous désignerons sur la tangente du trajet, tirée à partir de l'endroit où est situé dans chaque cas le point 0, le côté vers lequel on se rapproche en suivant le trajet, du point D, par le chiffre 4 ; le côté opposé sera désigné quant à lui par $\bar{4}$. Nous appellerons *progrédient* le mouvement dans la direction 4 (ou CD) et *rétrograde* le mouvement inverse. Au début du mouvement translatore de la boucle, son endroit sera dirigé vers 4 et son envers par conséquent vers $\bar{4}$. Nous concéderons à la ligne cyclique, lors de son déplacement, une modification quelconque mais néanmoins continue de sa grandeur et de sa configuration ; quant au plan circulaire, il pourra subir lui aussi une modification quelconque de sa situation, mais à condition que d'une part l'angle entre 1 et 4 ne soit jamais supérieur à 90° (c'est-à-dire que 04 ne tombe jamais dans le plan circulaire) et que d'autre part, lors des changements de situation successifs de la perpendiculaire à la boucle et lors des déplacements du centre de la boucle, l'ensemble des parties de celle-ci accomplisse toujours un

mouvement (même s'il est de grandeur inégale) dans la direction 03. Il est évident qu'étant donné les limitations que nous avons apportées à la différence entre les directions 3 et 4, le mouvement progrédient de la boucle pourrait être aussi bien désigné par 3 que par 4, de même que le mouvement rétrograde, par $\bar{3}$ comme par $\bar{4}$. La surface engendrée par la ligne circulaire lorsqu'elle opère un tel mouvement et encercle la conductrice à la façon d'un tuyau, est appelé *ascoïde*.

Si, au cours du mouvement progressif de la boucle, mouvement nécessaire à l'engendrement de l'ascoïde, un point se déplace sur la ligne circulaire elle-même, de façon continue dans une direction donnée, le point décrit alors un *hélicoïde* sur l'ascoïde, tout au long de la conductrice. La vitesse des deux mouvements simultanés, cyclique et progressif, ne subit aucune autre limitation que celle de ne pouvoir se changer en son contraire ; elle peut donc varier à volonté. Pour désigner le sens du mouvement cyclique du point, nous nous servons des quatre signes positionnels situés sur la circonférence de la boucle : 1, 2, $\bar{1}$, $\bar{2}$, de telle façon que le mouvement dans le sens 1 2 $\bar{1}$ $\bar{2}$ 1 puisse être exprimé indifféremment par 1 2 ou 2 $\bar{1}$ ou $\bar{1}$ $\bar{2}$ ou $\bar{2}$ 1, tandis que le mouvement inverse pourra l'être par 1 $\bar{2}$ ou $\bar{2}$ $\bar{1}$ ou $\bar{1}$ 2 ou 2 1.

Dès lors, le trajet du point qui décrit l'hélicoïde et par conséquent l'hélicoïde lui-même, est caractérisé topologiquement de la manière la plus simple par la combinaison des dénominations choisies pour les deux mouvements ; ainsi, à titre d'exemple, nous désignerons par (1 2)3 l'hélicoïde décrit par un point se déplaçant cycliquement dans le sens 1 2 progressivement dans le sens 3.

On peut aisément concevoir que des variétés de configuration de la conductrice ou de la ligne cyclique, mais aussi bien des changements de forme et de situation de celles-ci, ainsi d'ailleurs que des variations dans la vitesse et des changements de la vitesse du mouvement cyclique ou encore du mouvement translatore du point engendrant l'hélicoïde, n'entraînent dans l'hélicoïde, et ce, quel que soit le nombre de ces variations, que des différences au niveau de la suite de chiffres du type mentionné ci-dessus, et peuvent donc être considérés pour l'instant comme essentiellement géométriques. De même l'inversion

du sens des deux mouvements par laquelle le point placé sur le trajet hélicoïdal devient rétrograde, n'entraîne qu'une différence phoronomique*, qui fait que nous pouvons considérer par exemple comme topologiquement équivalents les trajets engendrés par $(1\ 2)3$ et par $(1\ \bar{2})\bar{3}$. Seule l'inversion du sens d'un seul des deux mouvements associés ou, ce qui revient au même, l'échange entre position d'axe droit et d'axe gauche lors de la détermination des points 1 et 2 sur la circonférence de la boucle avec maintien des mêmes symboles, est susceptible d'engendrer une modification essentiellement topologique de l'hélicoïde.

Une fois admises ces considérations, on constate aisément que les suites de chiffres qui servent à désigner l'hélicoïde — abstraction faite des parenthèses — doivent correspondre à celles des formes positionnelles dans lesquelles l'axe de position qui répond à la perpendiculaire de la boucle apparaît à la troisième place, c'est-à-dire correspondent aux seize formes des première et cinquième colonnes du tableau exposé plus haut. Si l'on avait transposé les axes 2 et 3 dans le plan circulaire et l'axe 1 sur la perpendiculaire, on aurait obtenu les formes positionnelles des deuxième et quatrième colonnes ; de même, si 1 et 3 avaient été placés dans la boucle et 2 sur sa perpendiculaire, les formes des troisième et sixième colonnes du tableau nous auraient donné les suites de chiffre correspondant aux différents hélicoïdes. On peut donc utiliser l'ensemble des quarante-huit formes positionnelles (en séparant par des parenthèses les deux premiers membres du troisième) comme formules des hélicoïdes. La dénomination introduite ci-dessus sera désormais limitée de préférence aux cas où l'on a choisi pour la boucle une position d'axe droit. Dans les cas contraires, où 0, 1, 2, 3 se trouvent en position d'axe gauche, on écrira par exemple $[1\ 2]3$. Il en résulte donc quatre-vingt-seize formes hélicoïdales différentes. Nous nous contenterons de présenter sur le tableau qui

* Phoronomique : synonyme de mécanique. Le terme *phoronomie* avait été proposé au début du XIX^e siècle pour définir la science des lois de l'équilibre et du mouvement des corps. (N.d.T.)

suit, la moitié dont les combinaisons sont toutes fondées sur une position d'axe droit :

(1 2) 3	(1 $\bar{2}$) $\bar{3}$	(2 3) 1	(2 $\bar{3}$) $\bar{1}$	(3 1) 2	(3 $\bar{1}$) $\bar{2}$
($\bar{1}$ $\bar{2}$) 3	($\bar{1}$ 2) $\bar{3}$	($\bar{2}$ $\bar{3}$) 1	($\bar{2}$ 3) $\bar{1}$	($\bar{3}$ $\bar{1}$) 2	($\bar{3}$ 1) $\bar{2}$
(2 $\bar{1}$) 3	(2 1) $\bar{3}$	(3 $\bar{2}$) 1	(3 2) $\bar{1}$	(1 $\bar{3}$) 2	(1 3) $\bar{2}$
($\bar{2}$ 1) 3	($\bar{2}$ $\bar{1}$) $\bar{3}$	($\bar{3}$ 2) 1	($\bar{3}$ $\bar{2}$) $\bar{1}$	($\bar{1}$ 3) 2	($\bar{1}$ $\bar{3}$) $\bar{2}$
($\bar{1}$ $\bar{2}$) $\bar{3}$	($\bar{1}$ 2) 3	($\bar{2}$ $\bar{3}$) $\bar{1}$	($\bar{2}$ 3) 1	($\bar{3}$ $\bar{1}$) $\bar{2}$	($\bar{3}$ 1) 2
(1 2) $\bar{3}$	(1 $\bar{2}$) 3	(2 3) $\bar{1}$	(2 $\bar{3}$) 1	(3 1) $\bar{2}$	(3 $\bar{1}$) 2
($\bar{2}$ 1) $\bar{3}$	($\bar{2}$ $\bar{1}$) 3	($\bar{3}$ 2) $\bar{1}$	($\bar{3}$ $\bar{2}$) 1	($\bar{1}$ 3) $\bar{2}$	($\bar{1}$ $\bar{3}$) 2
(2 $\bar{1}$) $\bar{3}$	(2 1) 3	(3 $\bar{2}$) $\bar{1}$	(3 2) 1	(1 $\bar{3}$) $\bar{2}$	(1 3) 2

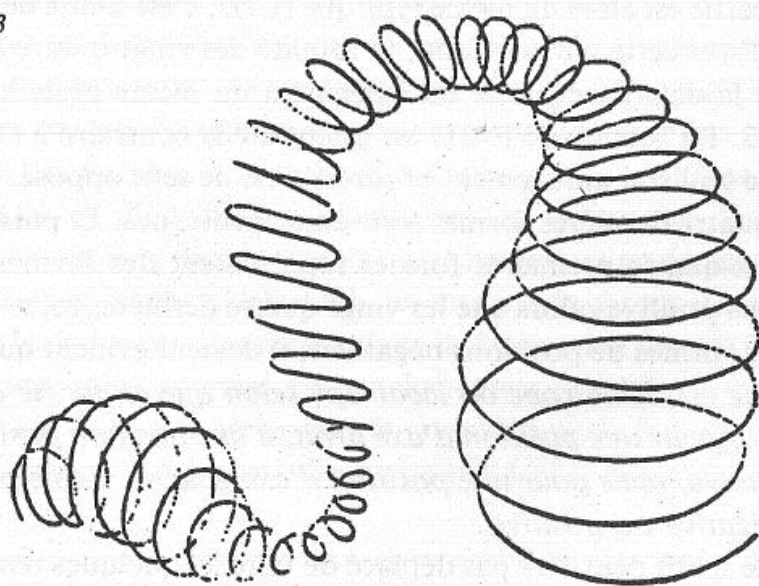
Les quarante-huit autres combinaisons ne se distinguent de celles-ci que par le remplacement des parenthèses par des crochets.

L'ensemble des hélicoïdes correspondant à ces formes se décompose donc, du point de vue topologique que nous venons de souligner, à savoir d'après leur *type de torsion*, en deux espèces dont

(12)3 et [12]3

peuvent être considérés comme les représentants. Les hélicoïdes correspondant à la première de ces deux formes sont nommés *destrogyres* ou *dextiotropes* ; celles qui correspondent à la seconde *lévogyres* ou *laeotropes*.

Fig.3



La *figure 3* représente un hélicoïde dextrope.

Puisque le type de torsion d'un hélicoïde n'est pas modifié par l'inversion du sens de l'ensemble des deux mouvements associés, mais seulement par une inversion de l'un des deux ou par commutation de la position d'axe avec celle qui lui est hétérologue, on distingue ainsi aisément si la forme d'un hélicoïde donné correspond à une torsion dextrope ou s'il s'agit d'une torsion laéotrope.

Chaque ligne horizontale du tableau précédent comporte trois paires de formes. Dans chaque paire, la seconde forme est toujours rétrograde par rapport à la première, en tant que les deuxième et troisième membres portent le signe opposé. Le type de torsion est identique pour chaque paire. Les trois formes (12)3, (23)1 et (31)2 sont également du même type puisque la modification implicite des axes positionnels, dont la position reste néanmoins homologue, peut être donnée par les positions positives 2 3 1 et 3 1 2 ; cette conclusion peut être appliquée à toutes les autres lignes du tableau. Le type de torsion est ainsi identique pour l'ensemble des six formes de chaque ligne. Les formes des deuxième, troisième et quatrième lignes ne se distinguent des formes correspondantes de la première que par un mode de désignation différent pour un sens identique du mouvement cyclique. La totalité des vingt-quatre formes de la première partie est alors du même type que (1 2)3, c'est-à-dire dextrope. Pour cette même raison, la totalité des vingt-quatre formes de la deuxième partie est également du même type, celui de (12)3. La torsion de $(\bar{1} \bar{2})3$ est quant à elle contraire à (12)3 puisque seul son mouvement progressif est de sens opposé. Les vingt-quatre dernières formes sont donc laéotropes. Et puisque les vingt-quatre premières formes représentent des formes de positions positives alors que les vingt-quatre dernières représentent des formes de positions négatives, il devient évident qu'*un hélicoïde est dextrope ou laéotrope selon que sa forme correspond, pour une position d'axe droit, à une position positive ou négative, mais pour une position d'axe gauche, à une position négative ou positive.*

Il ne serait peut-être pas déplacé de faire ici quelques remarques sur la façon dont on utilise couramment les dénominations

de ces deux types. En effet, c'est pure convention que d'appeler un des hélicoïdes ou pas-de-vis : droit, et l'autre : gauche. Pour ma part, j'ai choisi les noms de telle sorte qu'ils se rattachent le plus naturellement aux constatations topologiques précédentes, mais j'ai dû renoncer à la dénomination « tordu vers la droite ou vers la gauche, *dextrorsum* ou *sinistrorsum volubilis* et *contortus* » utilisée ailleurs, dans la mesure où aucune d'elle n'a hélas atteint à la signification universellement fixée qu'il conviendrait qu'elles aient, tant dans la terminologie botanique et zoologique que dans le langage technique. Les vis utilisées en mécanique se trouvent être dans leur immense majorité, pourvues d'une torsion laeotrope ; or, le langage technique les désigne comme des vis « droites », non seulement parce que ce sont les plus ordinaires, mais encore parce qu'elles sont en général conçues pour effectuer un mouvement vers le bas par une torsion à droite. Les vis dites « gauches », dont on se sert beaucoup plus rarement dans des cas particuliers (et dont les plus remarquables sont mentionnées dans *l'Encyclopédie technologique* de Precht¹), ont quant à elles une torsion dexiotrope. Il semblerait que le rapport entre fréquence et type de torsion soit inversé pour les vis japonaises. C'est à partir de ces faits que les dénominations de « droite » et de « gauche » ont été transposées à l'ensemble de ce qui a trait, dans le domaine technique, aux torsions en forme de vis, même quand la forme gauche (c'est-à-dire dexiotrope) est sans conteste la plus fréquente comme dans le cas des engrenages de montres, ou quand les deux types ont une fréquence semblable comme c'est le cas pour les ailes des moulins à vent, l'hélice des bateaux, la pompe en spirale, la vis d'Archimède, les escaliers en colimaçon, les colonnes torses et autres ornements architecturaux en forme de vis, mais aussi le ressort à boudin, les ressorts de chronomètres ainsi que les lisses ou fils entrant dans la fabrication des cordes, des cordons et des guimpes. En conchyliologie, la distinction en question est de tout premier intérêt pour l'étude de la morphologie des escargots. Là aussi, on a nommé droites les torsions laeo-

1. Tome XIII, page 316.

tropes qui sont la règle, et gauches, les torsions inverses ou dexiotropes, qui sont les plus rares ; cette dénomination peut, qui plus est, être considérée comme naturelle dans la mesure où l'on s'attache à suivre le sens du développement de l'animal : ainsi pour les torsions droites, en partant de l'apex de la coquille, celui-ci dirigé vers le haut, on descend en se laissant guider autour de l'axe, par un mouvement de torsion vers la droite. Dans d'autres cas zooliques, les deux types de torsions se trouvent le plus souvent conjugués au niveau des organes situés symétriquement par rapport à la médiane, de chaque côté du corps de l'animal. On en a des exemples avec le limaçon de l'oreille interne dans les classes animales supérieures, les cornes et les dents torses, etc. ; on peut également placer ici la défense torsadée et normalement unique du narval, dont le pendant s'atrophie ou ne se développe pas. Selon l'espèce de l'organe considéré, la torsion dexiotrope se trouve du côté droit ou du côté gauche de l'animal. Enfin, en botanique, les deux types de torsions peuvent être distingués non seulement sur la tige des plantes grimpan-tes, sur les vrilles et les vaisseaux spiralés, mais également dans les torsions des différentes parties des plantes, tel le tronc des arbres, les barbes, le pistil et surtout les corolles contournées des fleurs. Sur ce point, la nomenclature linnéenne coïncide avec la terminologie technologique ou conchyliologique que nous venons d'évoquer, encore qu'on puisse la considérer pour ainsi dire comme contre-nature ; car l'expression *caulis volubilis* est ainsi expliquée par Linné¹ : *spiraliter ascendens per ramum alienum*, à savoir *sinistrorsum* (C) *secundum solem vulgo*, e.g. *Humulus*, *Lonicera* cet. ; *dextrorsum* (D) *contra motum solis vulgi*, e.g. *Convolvulus*, *Phaseolus*, cet. Pour l'*intorsio*², il reprend cette définition et la classe avec les types de torsion du cirrus, de la corolle et d'autres organes. Dans une note sur ce sujet, Linné donne alors sa définition de *sinistrorsum* et *dextrorsum* qui a connu ultérieurement — en partie à cause de la faute d'impression commise à cette occasion — les exégèses les plus diverses. Linné établit que : *sinistrorsum hoc est quod respicit dextram, si ponas Te ipsum, in centro constitutum, meri-*

1. *Philosophia botanica*, 1751, page 39.

2. *Ibid*, page 103.

diem adspicere ; dextrorsum itaque contrarium, et explique ainsi son souci que les pétales dirigés vers le côté *droit* d'un observateur placé au centre, soient considérés comme le signe distinctif d'une corolle tordue à *gauche* et vice versa. Le *meridiem adspicere* n'est nullement dans le langage concret de Linné un terme superflu, mais rend compte bien plutôt de la position de l'observateur imaginé debout au cœur de la fleur, le visage tourné vers un point déterminé de l'horizon, la tête étant bien entendu dirigée vers le haut. Certes il reste, en ce qui concerne les définitions, nombre de points à préciser et autant à interroger d'un point de vue topologique. Ainsi pour *secundum solem*, on ne doit pas seulement tenir *crescens* ou *scandens* pour tacitement acquis, mais également *sub latitudine boreali* ; pour ce qui concerne les fleurs spiralées, la question reste ouverte de savoir si l'on entend par *hoc est, quod respicit dextram s. sinistram*, le bord intérieur ou extérieur des pétales, dont le côté dit intérieur (c'est-à-dire primitivement dirigé vers l'axe de la fleur) peut être orienté tantôt vers l'intérieur, tantôt vers le haut, tantôt vers l'extérieur selon le déploiement de la corolle, ou si l'on entend par là la face intérieure ou extérieure du pétale. Cependant, même les exemples de Linné ne nous fournissent pas d'indice certain pour trancher la question, comme il ressort du regroupement (mis en cause par Alexander Braun¹) qu'il opère de *Vinca* et de *Rauwolfia* avec *Asclenias*, *Periploca* et *Nerium*. Il semble néanmoins résulter de ce que nous venons de mentionner que Linné avait l'intention de donner le qualificatif de droites aux parties spiralées d'une plante, de la même façon qu'on qualifiait ailleurs de droits un tire-bouchon ou la coquille d'un escargot par exemple. Des auteurs botanistes ultérieurs ont longtemps suivi le conseil de Linné, qu'ils ont répété dans diverses définitions (en partie très imprécises). Reinhold Forster par exemple explique que : *truncus, volubilis, spiraliter ascendens per alia corpora, dextrorsum (D) a dextra ad sinistram, contra motum solis vulgo, sinistrorsum (C) a sinistra ad dextram, secundum solem vulgo*².

1. « Über die Ordnung der Schuppen an den Tannenzapfen » (À propos de l'ordre des écailles sur les pommes de pin), *Acten dev Leop. Carol Acad. d. Naturf.*, tome 15, première partie, p.15.

2. *Echiridion botanicae inserviens*, Lugd. Bat. ed. altera, 1792, p. 3.

Link : *caulis volubilis helicis in modum circa alia corpora firma volvitur et quidem destrorsum seu contra solis motum, uti nautae aiunt e.g. Convolvulus cet., aut sinistrorsum seu secundum solis motum e.g. Humulus cet*¹. On y ajoutera sans peine *constituere se ipsum in centro*. Willdenow nous explique² que la tige se tord « de la façon droite (*dextrorsum*) lorsqu'elle tourne en descendant de droite à gauche autour d'un objet comme par exemple *Convolvulus*, de façon gauche (*sinistrorsum*) lorsqu'elle tourne en descendant de gauche à droite autour d'un objet comme par exemple *Humulus Lupulus* ». Cette définition, aussi maladroite que vague dans sa forme, est, comme on ne peut que le constater d'après ces exemples, linnéenne dans son contenu et nécessite implicitement que l'observateur, situé à l'extérieur de l'hélicoïde, parcourt imaginativement de haut en bas les parties des tours de spires qui se trouvent dirigées vers lui. Dans d'autres écrits³, les désignations de *dextrorsum* et *sinistrorsum* sont utilisées au sens de Linné, alors que les signes  et  le sont en sens inverse. C'est toutefois Decandolle qui le premier a proposé l'échange des désignations elles-mêmes, proposition qui a été entérinée par la plupart des auteurs botanistes contemporains. L'avantage d'une définition plus naturelle, qui conserve la désignation antérieure mais en échangeant les significations, est cependant atténué par l'inconvénient que constitue la confusion qui en résulte. Decandolle définit par *dextrorsus*⁴ : qui se dirige à droite, et de là *dextrorsum volubilis* : qui s'enroule de gauche à droite ; dans ce sens, on se suppose au centre de la spire, tourné du côté du midi*, cette dernière définition n'étant à l'évidence qu'une traduction aveugle de *meridiem adspicere*. Decandolle s'exprime de la même façon

1. *Elementa philosophiae botanicae*, Berol, 1824, p. 145.

2. *Grundriss der Kräuterkunde*, 7^e ed., Link ed., Berlin, 1831, p. 41.

3. Par exemple in *Zimmermann's Grundzügen der Phytologie*, Vienne, 1831, p. 198.

4. *Théorie élémentaire de la botanique*, Paris, 1813, 2^e ed. 1819, p. 479.

* Ces deux définitions sont en français dans le texte.

sur ce sujet à d'autres endroits de ses écrits¹. Les dénominations de « tourné à droite et à gauche » vont également à l'encontre de la définition linnéenne et sont donc concordantes avec celle de Decandolle, chez des auteurs comme Mohl², Schleiden³, Endlicher et Unger⁴, ainsi que chez Alex. Braun⁵ et Naumann⁶ entre autres, dans leurs recherches sur la position des feuilles.

1. *Organographie végétale*, Paris 1827, p. 156, et *Physiologie végétale*, Paris 1832, p. 840.

2. *Ueber den Bau und das Winden der Ranken und Schlingpflanzen* (Sur l'organisation et la torsion des sarments et des plantes grimpantes), Tübingen, 1827.

3. *Grundzüge der wissenschaftlichen Botanik*, Leipzig, 1842. En 1^{re} partie, p. 140, on trouve : « Je veux discuter ici encore brièvement les dénominations de tiges tournées à droite et à gauche, pour lesquelles la confusion règne largement. La manière naturelle de regarder est la suivante : la plante se développe de bas en haut, donc elle monte ; si nous appliquons maintenant les expressions gauche et droite à la plante, ceci n'a de sens que si nous nous mettons pour ainsi dire à sa place ; mais nous ne montons alors en nous tournant à gauche que si nous avons l'axe de torsion à notre gauche, et en nous tournant à droite que si nous l'avons à notre droite. Si nous nous référons maintenant à la course du soleil, nous ne pouvons évidemment dans notre hémisphère nord mettre en rapport avec cette course que la partie de la torsion orientée vers le soleil, soit la moitié sud de la torsion ; mais dans ce cas la spirale tournée à droite va avec le soleil ; celle tournée à gauche, contre le soleil. Linné a curieusement lié les dénominations d'une façon inverse, en partant bien sûr d'une manière de regarder qui manquait de perspicacité, et certains l'ont suivi alors que d'autres ont complètement inversé la chose et appelé gauche ce qui jusque là était appelé droit et droit ce qui était gauche, jusqu'à ce que la chose soit devenue totalement confuse. En effet, la référence à la course du soleil reste une désignation toujours très imparfaite. Tourné à gauche ou à droite ne peut pas, me semble-t-il, être saisi autrement que comme je l'ai indiqué. »

4. *Grundzüge der Botanik*, entworfen von Stephan Endlicher und Franz Unger, Vienne 1843 ; où l'on trouve à la page 83 : « La tige torse (*caulis volubilis*) s'enlace en une ligne de vis (spirale) autour d'un support. Elle est spiralée à droite (*dextrorsum volubilis*) lorsque la torsion autour de l'observateur, qui doit se penser lui-même comme support, est orientée de gauche à droite vers le haut (*Humulus lupulus*, *Polygonum*, *Convolvulus*). La tige spiralée à gauche (*caulis sinistrorsum volubilis*) s'enroule autour de l'observateur de droite à gauche (*Phaseolus vulgaris*, *Convolvulus sepium*). Linné qualifie la tige qui se tord vers le bas de droite à gauche, de tournée à droite, et celle qui se tord vers le bas de gauche à droite, de tournée à gauche. Cependant, puisque la torsion s'opère en fait dans la nature du bas vers le haut, nous appellerons tourné à droite ce que Linné appelle tourné à gauche, et tourné à gauche ce qu'il appelle tourné à droite.

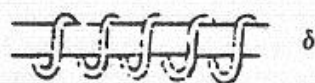
5. *Op. cit.*

6. C.F. Naumann, « Sur la quinconce, comme loi fondamentale de la position des feuilles dans le règne végétal », *Pogg. Ann.*, LVI, 7, dans lequel l'auteur se sert, du reste, de l'expression *dextrorsum et sinistrorsum scandens*, qui se rapproche plus d'une définition.

A l'égard du recouvrement des pétales d'une fleur, que nous avons évoqué plus haut, et notamment lors de l'éclosion de celle-ci, il s'avère cependant moins aisé qu'il n'y paraît d'après les définitions qui nous sont fournies sur ce sujet dans les travaux botaniques, d'en donner une définition topologique précise ; quel que puisse être le mérite des arguments d'un Braun, selon qui, afin de respecter une certaine cohérence, la gentiane, au moment de son éclosion, devrait d'après Linné être appelée *sinistrorsum* plutôt que *dextrorsum* et d'après Decandolle, *dextrorsum* au lieu de *sinistrorsum contorta*, il n'épuise cependant pas les divergences rencontrées à propos de cet exemple, dont une discussion plus détaillée nous entraînerait à l'évidence trop loin, et devra donc être réservée pour une autre occasion.

Mentionnons encore ici le fait que les lettres δ et λ offrent un excellent moyen mnémotechnique pour distinguer les deux types de torsion si on les compare avec la forme apparente des parties d'un hélicoïde (traversé par sa conductrice) visibles par un observateur, ainsi que la *figure 4* le montre clairement.

Fig.4



Le signe f permet lui aussi de rendre compte des torsions de vis *dexiotropes* — *ffffff*.

Le trajet loxodromique* d'un bateau qui se dirige exactement vers l'Ouest ou vers l'Est est un parallèle, mais dans tous les autres cas, il s'agit d'un hélicoïde qui s'avèrera dexiotrope si le pilote dirige sa route vers le Nord-Ouest ou le Sud-Est, et laeotrope s'il la dirige vers le Sud-Ouest ou le Nord-Est. Le sphéroïde terrestre à la surface duquel s'engendre l'hélicoïde, est

* Trajet d'un bateau suivant la ligne qui coupe les méridiens terrestres sous un angle constant. (N.d.t.)

à considérer dans ce cas comme un ascoïde en tout point fermé, ayant l'axe de la terre pour conductrice.

Si, lors de l'engendrement de l'hélicoïde mentionné ci-dessus, on laisse deux ou plusieurs points au lieu d'un seul se déplacer cycliquement dans une même direction sur la circonférence, on obtient alors des hélicoïdes *doubles* ou *multiples*. Si l'on pose préalablement et dans une visée immédiate que, malgré l'arbitraire de leurs mouvements relatifs, aucun des points considérés ne dépasse ou ne croise celui qui le précède, alors les différents hélicoïdes simples dont se compose un hélicoïde multiple et dont les torsions juxtaposées seront qualifiées de *paradromes*, ne présentent entre eux ni points de contact ni points d'intersection dans l'espace. Les arêtes d'une vis à double pas, de même que les bandes torses colorées qu'on voit sur de nombreuses coquilles univalves, offrent de bons exemples d'hélicoïdes multiples. Il est à peine besoin de mentionner qu'un hélicoïde multiple possède le même type de torsion que chacun de ses composants, lesquels doivent être entre eux dans une relation de similitude, c'est-à-dire isotropes.

Pour ce qui concerne les autres complexions linéaires dans l'espace, que nous aurons à étudier de plus près lors de travaux ultérieurs, nous devons prendre aussi en considération le cas où deux ou plusieurs points tournent cycliquement lors de leur mouvement progressif imposé par la conductrice, avec des vitesses dont la différence obéit à un ordre topologique, et où les hélicoïdes engendrés produisent un système de points d'intersection arithmologiquement ordonnés. Dans un tel cas, rien n'empêche que des hélicoïdes isotropes et hétérotropes puissent être liés entre eux. Un exemple de tels hélicoïdes, que nous qualifions de *diadromes*, nous est fourni par les rangées ou les spires selon lesquelles s'ordonnent les écailles des pommes de pin. Deux hélicoïdes isotropes engendrés sur un ascoïde commun peuvent être soit paradromes soit diadromes ; deux hélicoïdes hétérotropes sont toujours diadromes.

Avant d'aborder de nouveaux cas de combinaison entre différents hélicoïdes, il convient de s'arrêter sur le concept de surface hélicoïdale. Si nous relions le point H qui décrit l'hélicoïde et le point O sur la conductrice par une ligne droite (infinie),

nous engendrons alors simultanément à l'hélicoïde, une *surface hélicoïdale* appartenant à la même conductrice. Son intersection avec l'ascoïde est un double hélicoïde. Si la conductrice est une ligne droite et la boucle, un cercle de rayon constant dont le centre progresse sur la conductrice et dont le plan est perpendiculaire, nous engendrons alors une surface de vis comme nous pouvons en rencontrer sur les vis à pas plan, sur la vis d'Archimède et sur la face inférieure des escaliers de pierre en colimaçon, ou ainsi qu'il résulte de la torsion d'une bande plane (lame métallique) dilatable de façon élastique et flexible. D'autres espèces de surfaces hélicoïdales peuvent être engendrées en faisant passer la génératrice (droite ou courbe) toujours par le point H mais non plus par le point O ; au lieu de cela, on la fait passer par un point quelconque G de la conductrice, situé dans le plan de la ligne cyclique, mais participant de son mouvement translatore. Les pas de vis à arête vive, de nombreux outils du genre des perceuses, les surfaces d'animaux et de plantes torses, de même que les coquilles univalves et les fleurs, les feuilles et les graines enroulées en forme de spirale, sont autant d'exemples qui répondent à cette définition¹.

Il est possible de construire, en analogie parfaite avec les hélicoïdes correspondants, de nombreuses surfaces hélicoïdales appartenant à la même conductrice et qui peuvent être simultanément paradrome et isotropes, ou diadromes avec des types de torsion identiques ou inverses.

Différents points situés sur la génératrice OH ou GH peuvent décrire simultanément avec H, des hélicoïdes isotropes qui parcourent les mêmes surfaces hélicoïdales les uns à côté des autres, et dont les torsions sont paradromes entre elles.

Dans une ficelle ou une corde fabriquée par la torsion simultanée et conjuguée de multiples fibres ou ficelles tendues à l'origine les unes à côté des autres, les composants représentent une multiplicité d'hélicoïdes paradromes qui peuvent être considérés comme appartenant en groupe à différentes surfaces

1. Un joli cas nous en est offert par les ramoncules de la *Casuarina stricta*, tordus de façon dextroïtrope, que A. Braun a fait figurer dans l'article mentionné ci-dessus, sur le tableau 34, fig. 5 à 7.

hélicoïdales paradromes. Le cas le plus simple que nous puissions retenir ici, celui où la ficelle est faite de deux fils, nous fournira un point de départ essentiel en vue de nouvelles recherches topologiques.

Il convient encore d'indiquer la multiplicité des lignes et des surfaces hélicoïdales qui résultent de la variété de formes de la conductrice. Sans entrer dans le détail de cas qui peuvent s'avérer très complexes et qui ne peuvent être résumés méthodiquement sans que soit pris préalablement en considération le concept de complexion linéaire et de surface, nous ne mettrons ici l'accent que sur les deux formes simples et aisément concevables qu'il est possible de donner à la conductrice : l'hélicoïde et la ligne cyclique. Soit h un hélicoïde et g sa conductrice, laquelle — comme nous l'avons implicitement supposé — n'est pas elle-même hélicoïdale ou du moins n'est pas considérée comme telle : dans ce cas, l'hélicoïde h est un hélicoïde simple ou de premier ordre. Soit maintenant un nouvel hélicoïde k dont la conductrice est h , dans ce cas-ci l'ascoïde sur la surface duquel est situé k , possède une forme hélicoïdale et k est un hélicoïde de deuxième ordre. Si nous nous servons à son tour de k comme conductrice d'un hélicoïde l , alors l est un hélicoïde de troisième ordre, tandis que l'ascoïde correspondant possède une forme hélicoïdale de deuxième ordre, et ainsi de suite.

La possibilité de transposer ces concepts à des surfaces hélicoïdales ne nécessite pas d'autre démonstration.

Si, de plus, la conductrice g est une ligne cyclique, l'ascoïde correspondant (dont on suppose qu'il enferme en outre la conductrice cyclique en son entier) peut être clos de telle façon qu'il délimite ou non, en tout lieu, son espace tubulaire en forme de boucle par rapport à l'espace extérieur. Dans le cas où cet espace n'est pas délimité, peuvent se produire soit des entrecroisements de toutes sortes, soit une interpénétration successive (à la façon de tuyaux) d'un nombre quelconque de tours de l'ascoïde sans courbe d'intersection. On peut tracer sur ces divers ascoïdes en forme de boucle, des hélicoïdes simples ou composés. Si l'ascoïde est complètement fermé, un hélicoïde tracé dessus peut être bouclé sur lui-même et devenir ainsi une ligne simultanément hélicoïdale et circulaire, ceci aussi bien pour un tour

unique que pour un nombre quelconque de tours le long de l'ascoïde en son entier. Pour un nombre n de tours, chaque partie de l'ascoïde se présente recouverte d'un hélicoïde multiple de n dont les composants sont isotropes. Mais l'hélicoïde peut être non fermé et si on le prolonge suffisamment, il peut recouvrir chaque partie de l'ascoïde, d'un hélicoïde infiniment multiple. A la place d'un seul hélicoïde, on peut construire sur l'ascoïde circulaire, un nombre quelconque d'hélicoïdes fermés ou non, iso- ou hétérotropes, avec torsions para-ou diadromes. On utilise de semblables constructions pour l'ascoïde cyclique ouvert, à cette seule différence près que des hélicoïdes fermés ne sont rendus possibles qu'au cas où il existe des courbes d'intersection.

Enfin, des hélicoïdes d'ordre supérieur peuvent également être cycliques lorsque leur conductrice principale est une ligne circulaire. Il serait superflu de revenir ici sur la multiplicité des cas susceptibles de se présenter et dont nous avons déjà indiqué l'essentiel à propos des deux exemples précédents dont se trouve composé le cas présent.

Des surfaces hélicoïdales peuvent aisément être substituées à toutes ces différentes sortes d'hélicoïdes ou combinées avec elles.

La mention de quelques exemples va nous aider à préciser nos idées sur ce que nous venons d'avancer, sans que nous ayons besoin pour autant d'illustrations nombreuses et détaillées. Les cordes, les cordages, les cordons, fabriqués à partir de multiples fils de caret et de torons par torsions successives, donnent un exemple très répandu d'hélicoïdes d'ordres variés dans lequel (d'après les règles techniques) les types d'ordre successifs doivent toujours être opposés. Si un cordage de bateau est composé de trois torons torsadés de façon dextrogyre, ces composants vont donner l'image d'un hélicoïde triple dextrogyre de premier ordre avec torsions paradiadromes. Si chaque toron consiste en quatre torons plus minces, ces derniers vont former trois hélicoïdes laetropes quadruple de deuxième ordre. Et si, de plus, chacun de ces torons est formé de deux ficelles, elles-mêmes faites chacune d'un nombre indéterminé de fils de chanvre, les ficelles seront torsadées selon des hélicoïdes doubles dextrogyres de

troisième ordre et les fils selon des hélicoïdes multiples laeotropes de quatrième ordre. Enfin, comme c'est la règle sur les bateaux, si le cordage est enroulé sur le pont en forme d'hélicoïde, l'ordre de l'ensemble des hélicoïdes mentionnés augmentera de 1 et le fil de caret présentera des hélicoïdes multiples laeotropes de cinquième ordre avec torsions paradromes. Pour de nombreux articles de passementerie tels que cordons et guanses torsadées, on rencontre des exemples similaires mais en partie plus compliqués. Il est permis d'indiquer à cette occasion l'existence de cas en un certain sens paradoxaux, où par torsions successives, surtout opposées — pratiquement par alternance de torsions —, les hélicoïdes d'ordre supérieur perdent tout à fait à première vue et à certains endroits leur caractère de lignes doublement courbées ou même tout simplement courbées et donnent ainsi l'impression d'une forme de courbes ondulées (trochoïdes) ou même de lignes droites. Quoique, vue de l'extérieur, une corde puisse dans de tels cas se rapprocher beaucoup d'un toron torsadé, elle reste néanmoins de fait encore très différente d'une tresse, ce que des considérations ultérieures sur le tressage devront examiner de plus près. Dans la mesure où les déterminations quantitatives sont accessoires en topologie, ce paradoxe est à considérer ici comme le fait du hasard et trouve pour ainsi dire son pendant géométrique avec l'exemple connu de l'hypocycloïde qui devient une ligne droite dès que le point qui la décrit est situé sur la circonférence d'un cercle engendrant qui possède une taille de la moitié du cercle d'origine sur la paroi intérieure duquel il se déroule. On aurait pu à juste titre omettre de mentionner cette sorte d'occurrences si elles n'étaient particulièrement aptes à fonder inductivement le droit de considérer dans d'autres cas, si besoin était (ou si on le voulait bien), des lignes ou des parties de traits qui pourraient paraître à première vue tout sauf hélicoïdales, comme d'authentiques hélicoïdes ou des parties d'hélicoïdes, ou même de transposer leur type de torsion en un type hétérotrope et ce, en l'attribuant à un ordre supérieur. Un exemple rendra cela plus clair. Enroulons sur une tige rectiligne une ficelle de façon dextrotrope : il est vrai que la tige peut alors être envisagée — et c'est le point de vue qui s'offre à nous le plus naturellement — comme l'image de la

conductrice de l'hélicoïde dextrope décrit par la ficelle ; mais on peut aussi considérer la ficelle comme conductrice (hélicoïdale) et la ligne droite symbolisée par la tige, comme hélicoïde dextrope de deuxième ordre, ou encore tige et ficelle prises ensemble pouvant passer pour un double hélicoïde (de deuxième ordre) dont la conductrice serait un hélicoïde dextrope imaginé à l'intérieur de la tige, entre son axe et la ficelle, et dont les torsions seraient paradromes avec la dite ficelle. Si nous conférons alors à la tige (supposée à cette fin suffisamment flexible) une torsion laéotrope, la ficelle représente ainsi de la façon la plus simple un hélicoïde dextrope de deuxième ordre dont la conductrice, située à l'intérieur de la tige, est hélicoïdale de façon laéotrope ; néanmoins, la tige tout comme son axe peuvent être considérés comme étant un hélicoïde dextrope de troisième ordre dont la conductrice est un hélicoïde dextrope de deuxième ordre représenté par la ficelle ; ou encore, l'axe de la tige et de la ficelle pris à nouveau ensemble, peuvent passer pour un double hélicoïde dextrope de troisième ordre dont l'hélicoïde paradrome avec la ficelle que nous venons d'imaginer à l'intérieur de la tige, forme la conductrice dextrope hélicoïdale dans le deuxième ordre.

Pour les deux autres des trois cas que nous venons de discuter, à savoir les hélicoïdes avec conductrice annulaires et hélicoïdo-annulaires, il serait tout aussi aisé de se servir d'exemples évidents à l'aide d'objets souples en forme de ficelles (fils électriques et autres fils de métal). Envisageons donc parmi les divers spécimens de cette appartenance tels que ceux que nous venons d'évoquer, celui qui aurait droit à un intérêt plus particulier en tant que point de départ pour des considérations ultérieures sur les complexions linéaires dans l'espace, à savoir les hélicoïdes multiples isotropes et fermés ; et contentons-nous pour l'instant, puisqu'il ne s'agit que d'exemples, de choses simples. Prenons deux ficelles de même longueur et tendues parallèlement (homodromiquement) l'une à côté de l'autre. Les extrémités de l'une des ficelles seront désignées par 1 et $\bar{1}$, celles de l'autre par 2 et $\bar{2}$, de telle façon que 1 et 2 d'une part, ainsi que $\bar{1}$ et $\bar{2}$ d'autre part, soient placés respectivement au plus près. Si l'on tord maintenant les deux ficelles en tournant la ligne

$\bar{1} \bar{2}$ un nombre quelconque de fois autour d'un axe parallèle à la direction longitudinale initiale des ficelles, tandis que la ligne $1 \ 2$ reste immobile, alors, selon le sens de la torsion, les deux ficelles formeront un hélicoïde double dextro- ou laetotrope, dont la conductrice courra dans la direction de l'axe de torsion mentionné. La double ficelle ainsi produite par la réunion de ses deux extrémités de telle sorte que $1, \bar{1}, 2, \bar{2}$ soient nouées deux à deux de façon quelconque, peut être transformée en un hélicoïde double bouclé sur lui-même. Pour ce qui concerne la réunion des extrémités, voire leur fermeture, deux cas seulement s'avèrent possibles dans notre exemple, à savoir :

première fermeture : $(1 \ \bar{1})$
 $(2 \ \bar{2})$
 deuxième fermeture : $(1 \ \bar{2})$
 $(2 \ \bar{1})$

Dans le premier cas, chacune des deux ficelles prise isolément est fermée en anneau ; dans le second, les deux forment ensemble une ligne fermée. Le premier cas a lieu lorsque la torsion consiste en un nombre quelconque de tours entiers, c'est-à-dire un nombre pair de demi-tours ; le second cas, lorsque le nombre de demi-tours est impair. Le premier cas produit, en tant que la torsion 0 est elle aussi subsumée, deux anneaux séparés ou deux anneaux enchaînés avec torsion unique ou multiple ; le second cas aboutit à un anneau noué avec torsion unique ou multiple, à propos duquel les considérations sur les nœuds apporteront plus de lumière.

Si, au lieu de deux ficelles, on en avait pris trois, on aurait pu produire, après un nombre quelconque de torsions dextro- ou laetotropes, par réunion des extrémités $1, 2, 3$ avec les extrémités $\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}$, en combinant celles-ci deux-à-deux de façon quelconque, un triple hélicoïde fermé en forme d'anneau. Les six fermetures possibles donneraient alors (abstraction faite du nombre de torsions) trois cas essentiellement différents :

$(1 \ \bar{1})$	$(1 \ \bar{1})$	$(1 \ \bar{3})$	$(1 \ \bar{2})$	$(1 \ \bar{2})$	$(1 \ \bar{3})$
$(2 \ \bar{2})$	$(2 \ \bar{3})$	$(2 \ \bar{2})$	$(2 \ \bar{1})$	$(2 \ \bar{3})$	$(2 \ \bar{1})$
$(3 \ \bar{3})$	$(3 \ \bar{2})$	$(3 \ \bar{1})$	$(3 \ \bar{3})$	$(3 \ \bar{1})$	$(3 \ \bar{2})$

Premier cas : la première fermeture engendre trois anneaux séparés ou enchaînés.

Deuxième cas : les deuxième, troisième et quatrième fermetures engendrent deux anneaux (l'un composé d'une seule ficelle, l'autre des deux autres ficelles) qui peuvent être séparés ou enchaînés, simples ou noués.

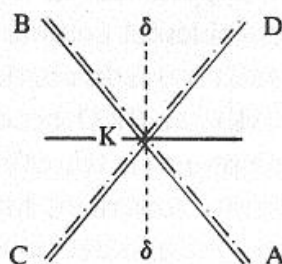
Troisième cas : les cinquième et sixième fermetures produisent un seul anneau simple et noué.

Ces exemples contiennent effectivement d'importants points de départ pour les futures investigations dans cette partie de la topologie qui devra traiter de la complexion linéaire dans l'espace et spécialement du nouage, de l'enchaînement et du tressage. Ces investigations s'en réserveront intégralement la poursuite et la généralisation. Il importe cependant de souligner encore ceci, qui est plus immédiatement en liaison avec la nature de l'hélicoïde, qu'en des circonstances par ailleurs identiques et dans tous les cas évoqués jusqu'ici, les formations linéaires qui sont mutuellement dans une relation de perversion et donc différentes les unes des autres non seulement par leurs situations mais aussi par leurs figures, sont engendrées à partir d'hélicoïdes composés de façon quelconque, tout comme pour l'hélicoïde simple, par torsion hétérotrope ou par torsion inverse. On pourra dorénavant utiliser les désignations « dextrope » et « laetropie » pour opérer également une différenciation précise dans ce cas-ci.

Enfin, l'idée de l'hélicoïde doit encore être appliquée à un cas élémentaire déjà évoqué ci-dessus (page 60) qui joue généralement un rôle essentiel pour les complexions linéaires dans l'espace, ainsi que partiellement pour les complexions planes. Car l'étude topologique des formations quelconques dans l'espace doit désormais être le plus souvent liée à leur projection sur une surface — plane ou sphérique — où les lignes projectives, encore appelées rayons, sont supposées être, pour le dire de la façon la plus générale, homocentriques, c'est-à-dire parallèles, ou, si on les prolonge suffisamment, supposées passer par un point commun : l'œil de l'observateur. Dans de telles représentations en deux dimensions, une distinction de la situation relative des différentes parties de corps, de plans ou de lignes

qui possèdent des points d'image communs s'avère nécessaire pour reconnaître les objets qui se recouvrent mutuellement dans l'image comme telle, et en tirer leurs positions relatives et leurs distances par rapport à l'œil de l'observateur sans avoir à recourir à d'autres projections. Les règles habituelles du dessin offrent des moyens suffisantes pour atteindre ce but dans la représentation des corps et des plans, de même pour les lignes lorsqu'il s'agit de représenter des corps linéaires dans l'espace (tiges, fils, ficelles, etc.).

Fig.5



Dans la figure 5, les deux lignes ou ficelles AB et CD se croisent l'une sur l'autre en K, tels le fil de trame et le fil de lisse d'un tissu : AB étant le plus près de l'œil de l'observateur (se trouvant donc dessus), CD en étant le plus éloigné. Il semble à peine nécessaire de préciser que la distance séparant les points des deux lignes là où elles se superposent dans leur projection en K n'est pas à prendre en considération. Un tel croisement* où il est facile, au premier coup d'œil, de distinguer dans la projection ou dans le dessin, d'après notre convention, le fil placé au-dessus de celui qui est en dessous, un tel croisement, donc, sera appelé *surcroisement*** par opposition avec l'*entrecroisement****, dans lequel existe un véritable point d'intersection dans l'espace, et où la distance entre les deux fils en K, dont nous venons de parler, est égale à zéro ou peut être considérée au moins comme infiniment petite. Deux chemins peuvent alors, comme pour un banal carrefour, s'entrecroiser ou

* Kreuzung.

** Überkreuzung.

*** Durchkreuzung.

bien, comme tel est le cas dans certaines villes¹ et pour de nombreux croisements entre chemins de fer et voies d'un autre type, se surcroiser. Quand aucune confusion n'est possible, on se servira dans les deux cas de l'expression « croisement ». On nommera le point d'intersection lui-même, dans la projection d'un surcroisement, *point nodal*.

Si nous prenons maintenant deux lignes AB et CD qui se surcroisent, comme appartenant à un double hélicoïde dont la conductrice passe par K entre les deux lignes, celles-ci peuvent, dans le surcroisement tel qu'il apparaît sur la figure là où AB se trouve au-dessus de CD, être considérées comme hélicoïdales, de façon dexiotrope ou laetrope selon que la conductrice est située dans les espaces angulaires AKC et BKD ou dans les espaces AKD et BKC. Par suite, nous pouvons transférer les dénominations dexiotrope et laeotrope au croisement lui-même si nous considérons celui-ci par rapport à une des deux lignes conductrices, diagonales et perpendiculaires entre elles. Pour les recherches futures sur les ficelles, rubans ou autres corps quelconques enchevêtrés et entrelacés plusieurs fois l'un avec l'autre, il sera utile de désigner dans les projections les quatre espaces angulaires que produit chaque surcroisement, avec les symboles δ et λ , comme le montre la figure, de telle sorte que le surcroisement soit dexiotrope pour une conductrice parcourant les espaces δ , δ et laeotrope pour une droite perpendiculaire à la précédente, dans les espaces λ , λ . Il convient de mentionner que cette désignation vaut aussi bien pour l'envers du surcroisement (où CD en K est plus près que AB de l'œil de l'observateur), que pour l'endroit que nous avons considéré en premier lieu, puisque seules les perversions et non les inversions peuvent avoir une influence sur ce type de croisement.

Quelques exemples de complexions linéaires avec surcroisements nous familiariseront avec l'usage de ce mode de désignation.

1. La curiosité de la ville de Homburg-von-der-Höhe réside en une « voie où une voiture peut passer au-dessus d'une autre ».

Fig.6

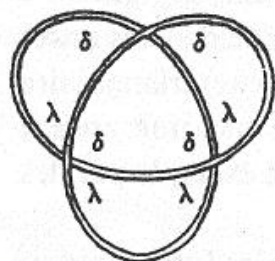


Fig.7

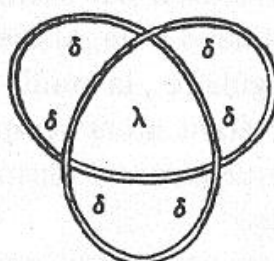
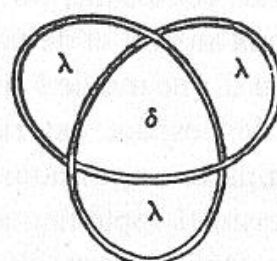


Fig.8



Si l'on projette les complexions des *figures 6, 7 et 8*, c'est-à-dire si l'on considère les croisements comme des surcroisements, elles sont toutes identiques. Chacune présente une ligne fermée sur elle-même avec trois croisements, trois parcelles à deux angles chacune ou *anses* et une parcelle à trois angles ou *maille*. Leur seule différence réside dans la nature des surcroisements, et cela nous est indiqué par le symbole du type de surcroisement, de telle sorte qu'il serait tentant d'engager une discussion algorithmique pour traiter des nombreuses questions que posent les possibilités ou les impossibilités de transformations dans certaines conditions : mais le lieu est mal choisi. La complexion de la *figure 6* peut être réduite à un simple anneau non noué, avec disparition des trois croisements. Dans les *figures 7 et 8*, le nombre de croisements ne peut pas être diminué par transformation, alors qu'il peut être augmenté comme dans tous les cas. La *figure 6* est donc une forme réductible ; les *figures 7 et 8*, des formes réduites. Cela est étroitement lié au fait que dans les deux dernières figures, toutes les parcelles sont monotypes ; par contre dans la première figure, une seule (l'anse inférieure) est monotype ; les autres, amphitypes. L'espace extérieur, que nous devons envisager dans ce type de considérations comme une parcelle indépendante (*amplexum*), est amphitype dans la *figure 6*, monotype dans les *figures 7 et 8*, et triangulaire dans les trois complexions. Dans la *figure 7*, à l'*amplexum* correspond la lettre λ ; dans la *figure 8* : δ . La *figure 7* ne peut être transformée en la *figure 8* ni l'inverse : elles se trouvent en effet l'une par rapport à l'autre dans un rapport de perversion. Chacune d'elle peut cependant être transformée sans changement du nombre

de croisement, de telle façon que le symbole de l'espace extérieur se change en δ pour la *figure 7* et en λ pour la *figure 8*. Mais ce faisant, on obtiendrait par exemple, dans la *figure 8* : deux anses λ et deux mailles δ triangulaires au lieu de trois anses λ et d'une maille δ triangulaire ; la maille (amplexe) triangulaire δ de l'espace extérieur étant alors remplacée par une anse λ amplexe ; nous nous abstiendrons d'illustrer cet exemple par des dessins supplémentaires.

Désignons maintenant, pour ce qui concerne les formes réduites à parcelles monotypes, chaque parcelle par le symbole de son type suivi d'un indice ou exposant qui précise le nombre d'angles de la parcelle, et rassemblons enfin en un coefficient les parcelles isotypes de même indice ; pour la *figure 7* par exemple, le symbole de la complexion pour l'ensemble des formes réduites sera alors :

$$\begin{array}{l} 3 \delta^2 \\ 2 \lambda^3 \end{array}$$

Pour la *figure 8*, on obtiendra (après échange de δ et λ), le symbole suivant :

$$\begin{array}{l} 2 \delta^3 \\ 3 \lambda^2 \end{array}$$

L'exposant 1 (c'est-à-dire δ ou λ seul) désignerait alors une boucle qu'on ne trouve pas parmi les formes réduites. L'exposant 2 indique qu'il s'agit d'anses. Des exposants supérieurs indiquent qu'il s'agit de mailles à trois angles ou plus. La somme de tous les coefficients donne le nombre de la totalité des parcelles, amplexum inclus, et est égale au nombre de croisements plus 2. La somme des produits des coefficients et de leurs exposants donne, dans chacune des deux parties du symbole, le double du nombre de croisements. De tels symboles contiennent les caractères topologiques de ce qu'on appelle nouage. Les *figures 7* et *8* s'accordent d'ailleurs avec l'anneau simplement noué mentionné ci-dessus, qu'on obtient par demi-torsions suivies de la fermeture en anneau de deux ficelles précédemment parádromes. Dans la *figure 7*, le type de torsion est dexiotrope ; dans la *figure 8*, laeotrope.

Poursuivons encore avec quelques autres exemples. Des trois complexions représentées par les figures 9, 10 et 11, qui ont toutes le même nombre de croisements et les mêmes formes parcel-laires, les deux premières sont réductibles et la troisième réduite.

Fig.9

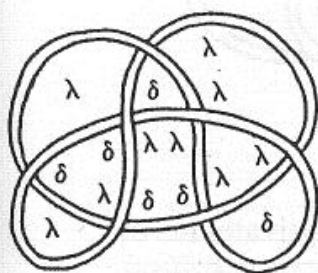


Fig.10

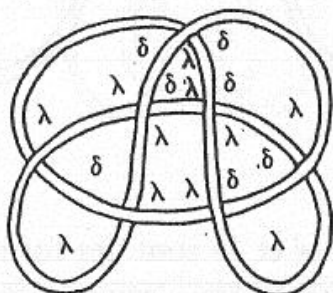
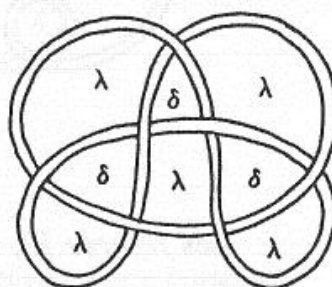


Fig.11



La réduction de la figure 9 aboutirait à trois croisements seu-lement ; celle de la figure 10, à cinq. La figure 8 représente la réduction de la figure 9.

Fig.12

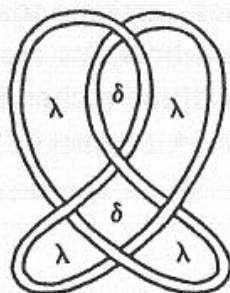


Fig.13

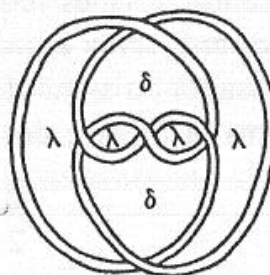


Fig.14

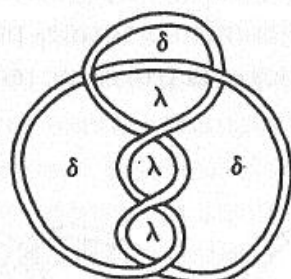
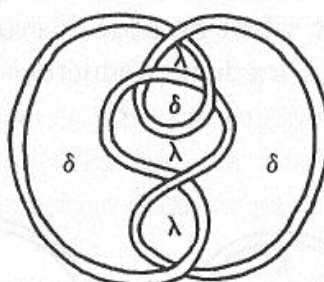


Fig.15



Les figures 12, 13, 14 et 15 sont des formes équivalentes et réduites à cinq croisements dans lesquels on peut transformer la figure 10 par réduction. Leur symbole de complexion est :

$$\begin{aligned} 2 \delta^4 + \delta^2 \\ 2 \lambda^3 + 2 \lambda^2 \end{aligned}$$

L'amplexum possède successivement les symboles δ^4 , δ^2 , λ^3 , λ^2 . Ces quatre formes épuisent le nombre de réductions possibles dans le cas présent, et correspondent ici aux quatre membres du symbole. Le déploiement des rapports entre le nombre des différentes formes réduites possibles correspondant à un symbole donné, avec le nombre des membres, les coefficients et les exposants du symbole, fait l'objet d'une recherche particulière dans la théorie des complexions. Au symbole

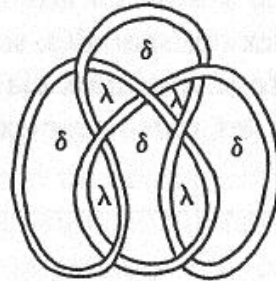
$$\begin{aligned} 2 \delta^4 + 3 \delta^3 \\ 2 \lambda^5 + 2 \lambda^2 \end{aligned}$$

correspondent cinq formes réduites différentes avec sept croisements chacune, dans lesquels l'amplexum prendrait deux fois le signe δ^2 et une fois respectivement δ^4 , λ^5 et λ^2 . Le symbole de la forme réduite à sept croisements de la figure 11 est :

$$\begin{aligned} \delta^5 + 3 \delta^3 \\ \lambda^4 + 2 \lambda^3 + 2 \lambda^2 \end{aligned}$$

A ce symbole correspondent, outre la figure 11, dans laquelle l'amplexum est δ^5 , cinq autres formes encore, dont celle de la figure 16 pour laquelle l'amplexum est λ^4 .

Fig.16

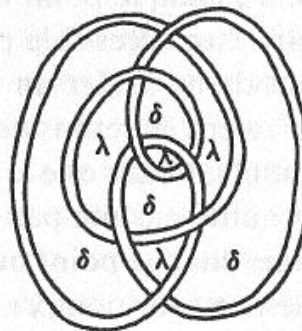


Dans certains cas, un symbole est équivalent à un autre en ceci que les formes réduites de l'un peuvent être rapportées par transformation aux formes réduites de l'autre. Voici un exemple d'une telle équivalence :

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta^5 + 3 \delta^3 \\ \lambda^4 + 2 \lambda^3 + 2 \lambda^2 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} 2 \delta^4 + 2 \delta^3 \\ \lambda^4 + 2 \lambda^3 + 2 \lambda^2 \end{array} \right\}$$

Tandis qu'au premier de ces deux symboles équivalents correspondent six formes réduites, au deuxième en correspondent cinq autres, de telle sorte que toutes les onze formes réduites (avec sept surcroisements chacune) sont équivalentes entre elles. Une des cinq formes correspondant au deuxième symbole est représentée par la *figure 17* dont l'amplexum est λ^2 .

Fig.17



Ces exemples, qui ne se réfèrent qu'à une seule ligne fermée dans l'espace, pourront servir à l'occasion, avec quelques indications supplémentaires, à attirer l'attention, dans la prise en considération des complexions spatiales, sur les relations qui existent entre les concepts fondamentaux élaborés pour l'hélicoïde et les rapports modaux les plus complexes.

Au terme de ces premières études préliminaires, précisons d'encore plus près l'esquisse de quelques autres secteurs de la topologie dont l'approfondissement sera réservé à des occasions futures.

Des complexions linéaires, c'est-à-dire des lignes quelconques, droites ou courbes, ou des agrégats de telles lignes, peuvent être contenus dans une seule surface — plan ou sphère —, mais peuvent aussi bien traverser l'espace dans une direction. Elles peuvent présenter dans les deux cas un nombre quelconque de points d'intersection ou de points de réunion ; en outre, dans le deuxième cas, elles peuvent présenter, en plus de ces points de réunion, un nombre quelconque de surcroisements par projection sur un plan ou une surface sphérique.

Pour les complexions linéaires dans le plan, c'est-à-dire là où il n'existe que des points d'intersection et des points de réunion, chaque point qui appartient au complexe linéaire peut être considéré comme un lieu à partir duquel un nombre déterminé de chemins est ouvert vers les autres points du complexe. Ainsi, sur une ligne droite tracée entre deux points A et B, chacun des deux points d'extrémité peut être considéré comme accessible par un chemin et un seul ; chaque point intermédiaire C de la ligne pouvant par contre être accessible par deux chemins. Si l'on exigeait maintenant de ne fouler un chemin qu'une seule fois, alors A et B ne devraient en retour ne former que les limites d'un trait continu simple, tandis que le point C pourrait être abordé par une voie et quitté ensuite par une autre. Il est évident qu'on peut envisager chaque point où n chemins trouvent leur réunion, selon que n est un nombre pair ou impair, soit comme point d'intersection de $\frac{n}{2}$ lignes, soit comme le lieu

où le point d'intersection de $\frac{n-1}{2}$ lignes se réunit avec le

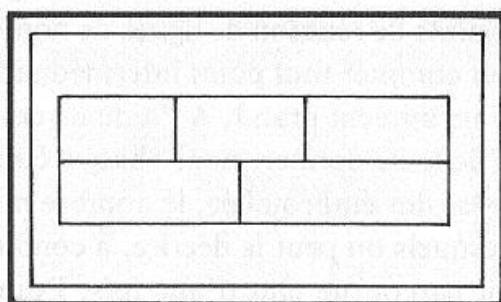
point d'extrémité d'une ligne. Il s'ensuit qu'une complexion linéaire peut être considérée dans sa totalité comme l'agrégat d'un nombre déterminé de traits continus, dont chacun possède deux points terminaux ou points d'extrémité qui sont situés sur des points de réunion d'un nombre impair de lignes. Il doit alors exister dans chaque complexion linéaire (et par conséquent dans chaque somme de complexions non connexes) un nombre pair de points de réunion d'un nombre impair de lignes, tandis que le nombre de points de réunion de lignes de nombre pair (parmi lesquels on peut compter tout point intermédiaire sur une ligne) est quant à lui infiniment grand. A l'aide de cette proposition, il n'est pas difficile de donner, pour chaque complexion déterminée, fût-elle la plus embrouillée, le nombre minimal de traits continus par lesquels on peut la décrire, à condition qu'aucune partie n'en soit parcourue plus d'une fois. Pour déterminer ce nombre minimal de traits, il faut alors compter les points de réunion de lignes de nombre impair de la complexion. Si le nombre, qui doit toujours être pair, est appelé p , alors le nombre minimal de traits par lesquels la configuration peut être décrite sera $\frac{p}{2}$. Pour une véritable effectuation autant que pour la

délimitation des diverses façons possibles de procéder, il serait bien entendu nécessaire de faire encore des recherches complexes, qui ne pourraient avoir leur place dans cette étude. Mais notons cependant qu'au cas où $p = 0$, le nombre de traits n'est pas égal à 0 mais à 1 ; ces déterminations s'appliquent à une multiplicité de complexions non connexes autant qu'à chacune prise isolément, de telle façon que pour la description de m complexions non connexes où il n'existe aucun point de réunion d'un nombre impair de lignes, comme par exemple pour la description de m lignes circulaires non connexes situées les unes en partie à l'extérieur des autres et en partie concentriquement les unes par rapport aux autres, on a besoin de m traits, aussi bien que pour la description d'une complexion qui posséderait $2m$ points de réunion d'un nombre impair de lignes, ou m complexes non connexes dont chacun contiendrait deux points de cette espèce.

Indiquons en outre que la réussite d'un essai réel dans le cas où p n'est pas égal à 0 dépend de la condition que le point de départ et le terme de chaque trait ne puissent se rencontrer qu'en des points de réunion d'un nombre impair de lignes.

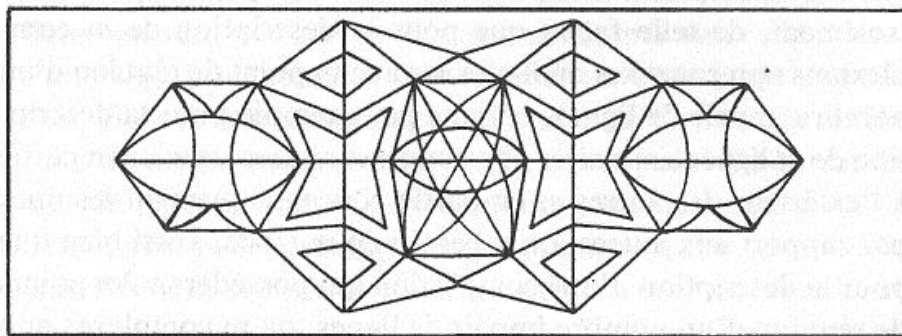
Dans la *figure 18*, il existe huit points « impairs » (chacun à trois chemins) ; si on ne trace pas deux fois la même partie, cette figure ne peut être dessinée en moins de quatre traits continus¹.

Fig. 18



Un carré inscrit dans un cercle et muni de ses deux diagonales exigerait au moins deux traits ; la grille d'un échiquier (de soixante-quatre cases), au moins quatorze traits. Si toutes les cases noires de cet échiquier étaient pourvues d'une diagonale de même direction, alors le dessin pourrait être effectué en neuf ou six traits continus, selon que les diagonales des cases noires d'angle seraient ou non sur une même ligne ; enfin, si la totalité des cases de l'échiquier était pourvue de diagonales parallèles, on pourrait achever la figure d'une seule et même trait.

Fig. 19



1. C'est la proposition de Clausen, mentionnée à la p. 813 des *A.N.*, N° 494.

La *figure 19* peut elle aussi être dessinée d'un seul trait, puisqu'elle possède seulement deux points « impairs », nommément les deux points de réunions de cinq traits à chaque extrémité de l'axe horizontal.

Si l'on applique maintenant la proposition précédente concernant le nombre p à un cas géodésique, elle peut être énoncée de la façon suivante : dans chaque chaîne de triangles¹ de grandeur quelconque, les points autour desquels un nombre impair d'angles est situé à l'horizon (angles qui totalisent 360°), ces points sont toujours de nombre pair, tandis que le nombre de points de triangles qui sont entourés d'un nombre pair d'angles peut être soit impair soit pair.

Si l'on donne enfin toute leur étendue à ces remarques, elles trouvent leur application aux complexions linéaires dans l'espace. Les surcroisements qui apparaissent dans les projections doivent, comme il se doit, être distingués des entrecroisements ou points de réunion.

Pour ce qui concerne les complexions linéaires dans un plan, qui ne possèdent pas de points de nombre impair, et qui doivent donc être considérées comme des traits fermés faisant retour sur eux-mêmes ou comme des agrégats de tels traits, la question des parties de plan délimitées par la complexion (parcelles) devrait faire l'objet à soi seul d'une discussion. La description des complexes sur une surface sphéroïde fermée ou sur un globe terrestre a, du point de vue de la simplicité et de l'élégance des propositions, des avantages par rapport à la description sur une surface non fermée ou un plan, qui peuvent toujours être considérés pour ces questions comme simples fragments d'une surface sphéroïde complète (de très grande dimension) et à laquelle on peut en général aisément aboutir à partir de la surface fermée et complète, par un certain type de développement. Si l'on imagine par exemple, sur une surface sphéroïde, une simple ligne circulaire, celle-ci divisera la totalité de la surface en deux parties A et B, dont chacune sera entièrement située d'un côté de

1. Il s'agit de la méthode des triangulations utilisée dans la géodésie classique à partir de la formule de Laplace, et qui permet de donner la mesure de l'angle géodésique. (N.d.T.)

la ligne de partage. On peut appeler A la surface intérieure ou enclose, et B la surface extérieure ou exclue ; ou bien l'inverse. Pour des complexions fermées et composées de plusieurs éléments, cette alternative se répète un nombre de fois identique au nombre de traits fermés simples dont on peut considérer que le complexe est composé. Une fois notre choix fait sur l'inclusion et l'exclusion, modalités qui peuvent être désignées le plus simplement possible par l'usage des nombres ordinaux 0 et 1, la valeur de chaque partie de plan délimitée sera exprimée automatiquement par un de ces nombres. Une ligne fermée avec un entrecroisement (ayant donc la forme du chiffre 8) divise la surface totale en trois parties. Si l'on désigne par 0 l'espace entourant les deux boucles¹, et par 1 une des deux boucles, le nombre ordinal du territoire de l'autre boucle sera alors $\bar{1}$. Si l'on échange 0 et 1, c'est deux qui vient alors à la place de $\bar{1}$, etc. Si l'on place maintenant, dans chaque espace angulaire d'un entrecroisement, les quatre chiffres ordinaux a, b, c, d , telle sorte que a et b , b et c , d et a appartiennent à des angles adjacents et donc a et c , b et d à des angles opposés, il en résulte la règle suivante :

ou bien :

$$a - c = \pm 2, b - d = 0, a + c - b - d = 0$$

ou bien :

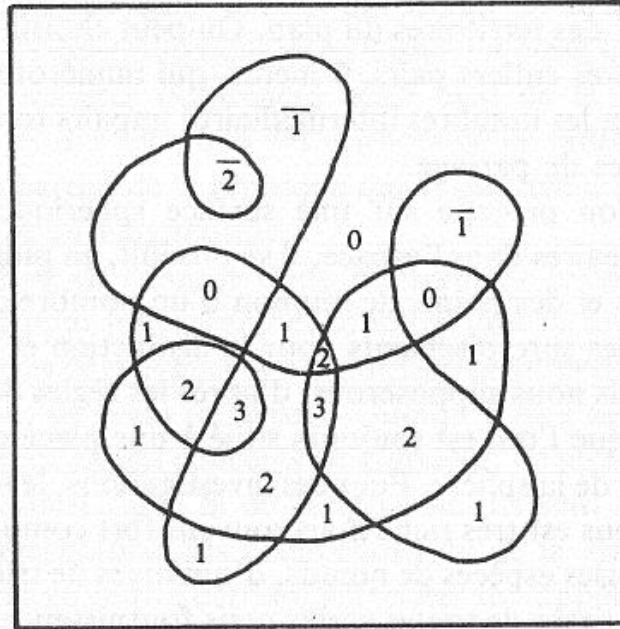
$$a - c = 0, b - d = \pm 2, a + c - b - d = 0,$$

d'après laquelle toutes les parcelles d'une complexion donnée peuvent être aisément chiffrées.

La complexion linéaire représentée sur la *figure 20* va nous servir d'exemple. Ce trait fermé partage avec dix-huit entrecroisements la surface sphérique totale en vingt parcelles ; la parcelle qui apparaît dans une représentation plane comme l'aire entourant la figure, c'est-à-dire l'amplexum, porte le nombre ordinal 0 ; mais — et cela vaut pour chacune des autres parcelles — elle pourrait être élevée (ou abaissée) à un nombre quelconque positif ou négatif par augmentation ou diminution

1. Cette partie de l'espace de la surface sphéroïde est diangulaire ; il s'agit donc d'une « anse » d'après la terminologie utilisée plus haut.

Fig.20



simultanée de l'ensemble des vingt nombres, d'un nombre entier quelconque, ce qui est bien entendu sans influence sur le nombre de classes ordinales (six dans notre exemple, allant de $\overline{2}$ à $\overline{3}$ inclus). Dans certains cas¹, il est nécessaire d'attribuer

1. Cf. les remarques de Gauss sur les modes de distribution possibles des éventuels lieux géocentriques sur le Zodiaque pour une planète donnée, *A.N.*, n° 625. Le cas dont il est fait présentement mention, à la suite des récentes recherches effectuées sur ce sujet par M. B.A. Gould, est celui de l'enchaînement de deux orbites planétaires. Il apparaît que ce sont celles des paires, parmi les neuf orbites d'astéroïdes connus à ce jour, formant comme les anneaux d'une chaîne, qui méritent ici notre intérêt. Il s'agit des vingt-cinq combinaisons suivantes (Thétis est le nom de la planète découverte le plus récemment et qui l'a été par Graham) :

- Thétis avec Hébé, Vesta, Astrée, Iris, Junon, Flore, Pallas
- Hébé avec Vesta, Astrée, Iris, Junon, Flore, Pallas, Cérès
- Vesta avec Astrée, Iris, Junon, Flore
- Astrée avec Iris, Junon, Flore
- Iris avec Flore, Pallas
- Junon avec Pallas, Cérès
- Flore avec Pallas

où Thétis et Hébé apparaissent combinées sept fois chacune ; Vesta, Astrée, Iris et Junon, six fois chacune ; Flore et Pallas, cinq fois chacune, enfin Cérès, deux fois. Les onze combinaisons restantes où Cérès apparaît six fois, Pallas et Flore trois fois chacune, Junon, Iris, Astrée et Vesta deux fois chacune, Hébé et Thétis une fois chacune, présentent, comme pour chaque paire orbitale parmi les autres planètes principales, la simple inclusion d'une orbite dans une autre. Le trajet orbital de Cérès enferme six autres orbites : celles de Pallas, Flore, Iris, Astrée, Vesta et Thétis ; l'orbite de Pallas en contient deux : celles d'Astrée et de Vesta ; l'orbite de Junon deux aussi : celles de Flore et d'Iris ; enfin l'orbite de Hébé, une : nommément celle de Flore.

également des nombres ordinaux aux points situés sur la ligne de partage elle-même, comme on l'a fait pour les points situés à l'intérieur des territoires du plan. On peut choisir pour ceux-ci les nombres entiers pairs, 0 inclus, qui numérotent ainsi les parcelles ; et les nombres intermédiaires impairs tombent alors sur les lignes de partage.

Lorsqu'on projette sur une surface sphérique des complexions linéaires dans l'espace, il se produit, en plus des entrecroisements et des points de réunion d'un nombre quelconque de lignes, des surcroisements pour la distinction et la désignation desquels nous supposerons, d'après les règles déjà établies plus haut, que l'œil est toujours situé à une place quelconque à l'intérieur de la sphère. Pour ces investigations, le matériel qui s'offre à nous est très riche mais souvent fort compliqué, dont les nombreuses espèces de nœuds, d'ouvrages de tricot et d'entrelacs ; les tissus de toutes sortes nous fournissent entre autres maints exemples en provenance des domaines de la technique et de la pratique. Certains objets dont les relations avec des questions scientifiques ne sautent pas immédiatement aux yeux, comme certains types de jeux, parmi lesquels le jeu bien connu des anneaux artificiellement entrelacés¹ mérite d'être distingué, sont autant de paradigmes topologiques qui ne manquent pas d'intérêt. Les contributions topologiques à venir devront entreprendre le regroupement d'un certain nombre de nœuds différents, en usage par exemple dans l'artillerie, le génie, la marine, le tissage ou les nœuds utilisés ailleurs, mais s'attacheront aussi aux noms triviaux de ces nœuds ; à cette occasion, on pourra prendre en considération, s'agissant de cas en provenance de la pratique, leurs relations non topologiques mais de nature physique, mécanique, industrielle, voire esthétique, dans la mesure où cela peut servir à la distinction de points de vue purement topologiques.

Les considérations sur la position qui ont ouvert nos études préliminaires devront, pour la suite de notre travail, être, d'une part, élargies à des cas où les éléments possèdent un nombre

1. Les considérations faites à ce sujet par Lichtenberg (*Vermischte Schriften*, t.6, p. 252) ne sont pas d'ordre topologique.

d'axes positionnels autre que trois, et d'autre part, être liées à des investigations prenant aussi en compte la *situation*, c'est-à-dire la position des lignes droites qui relient les éléments entre eux — de telles déterminations introduisant un point de vue topologique des maintes occurrences aussi bien de la mécanique industrielle¹ et des arts, que des sciences de la nature, et notamment des parties de la physique qui se réfèrent à l'électricité dynamique et au magnétisme.

La *symétrie* de l'espace et du mouvement forme enfin un sujet fécond pour les recherches topologiques futures, dont ce que nous avons déjà avancé sur la position peut servir, au moins partiellement, de point de départ. Quoiqu'il ne s'agisse pas de négliger dans ce cas les concepts de grandeur, de mesure, de ressemblance géométrique ni de congruence, ils sont cependant, dans la représentation des proportions ou de la symétrie spatiale, toujours en retrait derrière le concept de rapports modaux d'espace ; et par conséquent, la symétrie échoît moins aux ressorts de la géométrie qu'à ceux de la topologie. Les lois de la symétrie jouent un rôle essentiel, d'une part dans la morphologie des êtres organisés, et d'autre part en cristallographie tout particulièrement².

1. A cette occasion, on peut attirer l'attention sur une tentative pour représenter les mouvements des machines par des symboles : « *On a method of expressing by signs the action of machinery* », de Charles Babbage, *Philos. Trans. for the Year, 1826, part 3*, p. 250.

2. En rapport avec ce que nous venons d'évoquer, le texte désormais classique sur la cristallographie : *A Treatise on Crystallography*, de W.H. Miller (Cambridge, 1839), mérite une attention particulière, dans la mesure où l'importance de la symétrie pour caractériser les systèmes cristallins s'y trouve prise en compte et y est intégrée au mode de description de la façon la plus claire. Ainsi, l'auteur écrit, à la page 20 : « Les différents systèmes de cristallisation peuvent être distingués à un niveau de plus par la diversité des modes de symétrie observables dans la répartition des faces des cristaux correspondants. En effet, si une face se trouve posséder le symbole (*hkl*), elle le sera généralement accompagnée par les faces ayant pour symboles certaines combinaisons de $\pm h$, $\pm k$, $\pm l$, déterminées par des lois particulières à chaque système et qui seront pleinement exposées dès que nous aborderons séparément la description de chacun de ces systèmes. » Il est à peine besoin de mentionner la proximité des relations qu'entretiennent l'hémiédrie et l'holéodrie des formes cristallines avec la symétrie.